Fonctions polynômes du second degré

1 fonction carré

Définition

La fonction carré est la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$

Propriétés

- Un carré est toujours positif ou nul. Pour tout réel x, on a $x^2 \geqslant 0$.
- Un nombre et son opposé ont le même carré. Pour tout réel x, on a $x^2 = (-x)^2$.

2 variations de la fonction carré

Variations

La fonction carré définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$ est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$

tableau des variations de la fonction carré

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↗	

Preuve : Soient a et b deux réels et f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$.

$$f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

- Si $a < b \leqslant 0$:
  $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$ et $a < b \leqslant 0 \Leftrightarrow a + b < 0$ donc $f(a) - f(b) > 0$
  Ainsi, sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$. La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$.
- Si $0 \leqslant a < b$:
  $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$ et $0 \leqslant a < b \Leftrightarrow a + b > 0$ donc $f(a) - f(b) < 0$
  Ainsi, sur l'intervalle $[0; +\infty[$ si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$. La fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

conséquences

— Deux nombres négatifs et leurs carrés sont rangés dans l'ordre contraire. Si $a \leqslant b \leqslant 0$ alors $a^2 \geqslant b^2$

— Deux nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre. Si $0 \leqslant a \leqslant b$ alors $a^2 \leqslant b^2$

EXEMPLE

Déterminer un encadrement de x^2 pour $-3 \leqslant x \leqslant 2$.
La fonction carré f n'est pas monotone sur l'intervalle $[-3;2]$.
f est décroissante sur $[-3;0]$ et croissante sur $[0;2]$.

x	-3		0		2
$f(x)$	9	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

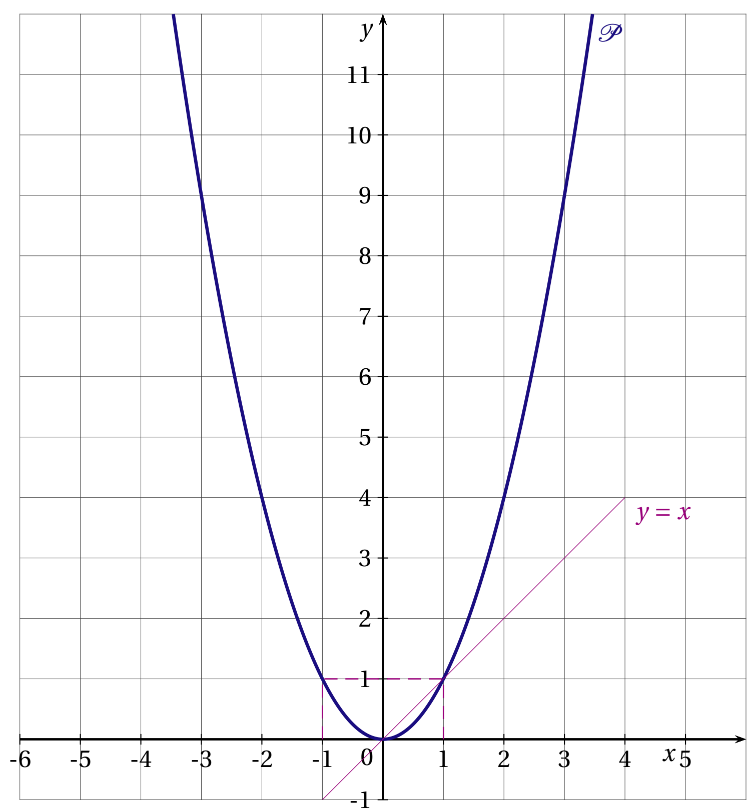
— Si $-3 \leqslant x \leqslant 0$ alors $0 \leqslant x^2 \leqslant 9$

— Si $0 \leqslant x \leqslant 2$ alors $0 \leqslant x^2 \leqslant 4$

D'après les variations de la fonction carré, si $-3 \leqslant x \leqslant 2$ alors $0 \leqslant x^2 \leqslant 9$

3 courbe représentative

La courbe représentative de la fonction carré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$.



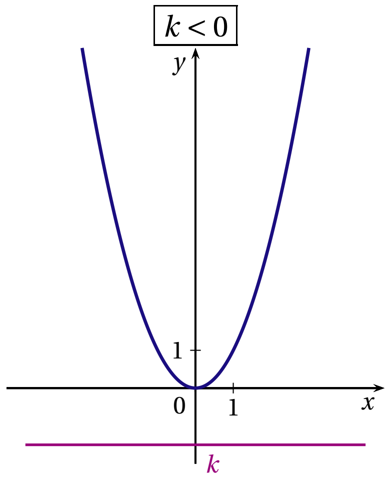
REMARQUE :

Si $0 \leqslant a \leqslant 1$ alors $a^2 \leqslant a$. Sur l'intervalle $[0;1]$, la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ est au dessous de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.

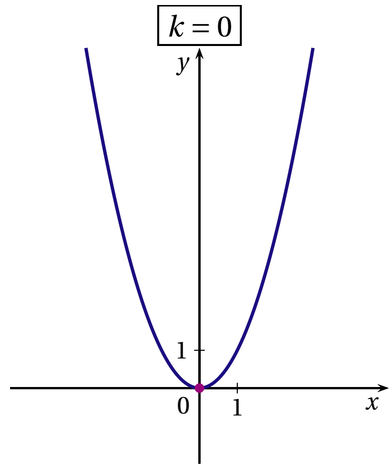
4 équations, inéquations

équations $x^2 = k$ avec k réel

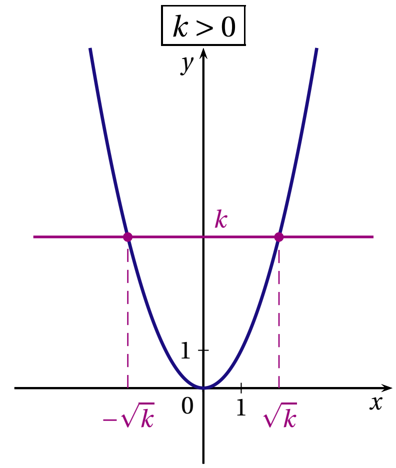
— Si $k < 0$, comme un carré est positif, l'équation $x^2 = k$ n'a pas de solution.
— Si $k = 0$, l'équation $x^2 = 0$ a pour unique solution $x = 0$
— Si $k > 0$, résoudre l'équation $x^2 = k$, revient à résoudre l'équation $x^2 - k = 0 \Leftrightarrow \left(x+\sqrt{k}\right)\left(x-\sqrt{k}\right) = 0$.
On obtient les deux solutions $x = -\sqrt{k}$ ou $x = \sqrt{k}$.



$x^2 = k$ n'a pas de solution



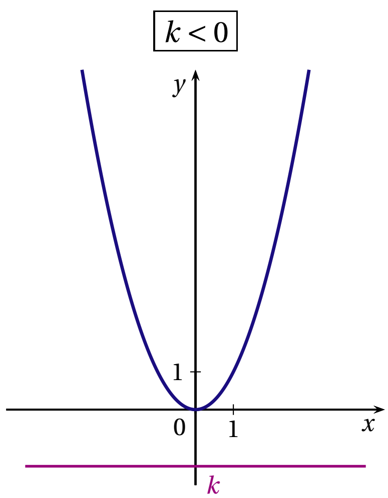
$x^2 = 0$ a pour unique solution 0



$x^2 = k$ a deux solutions $-\sqrt{k}$ ou $\sqrt{k}$

inéquations $x^2 \leqslant k$ ou $x^2 \geqslant k$ avec k réel

Résoudre une inéquation $x^2 \leqslant k$ ou $x^2 \geqslant k$ avec k réel revient à étudier le signe de $x^2 - k$.

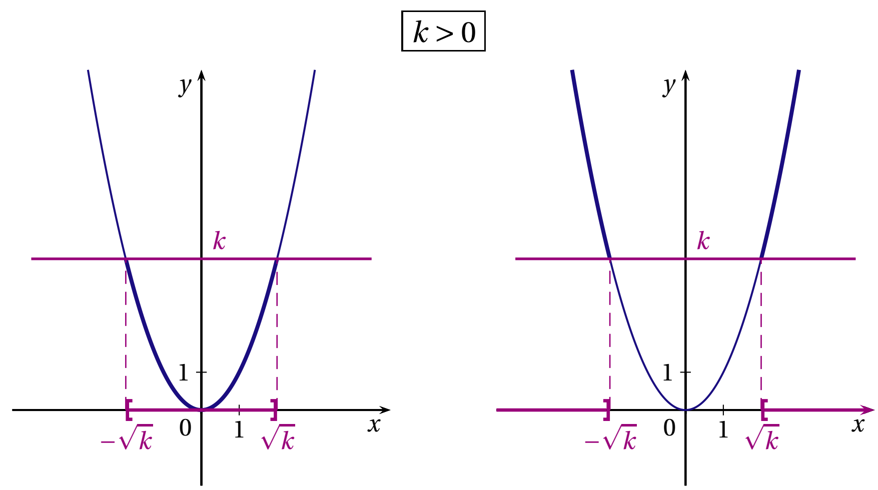


L'inéquation $x^2 \leqslant k$ n'a pas de solution :

$$S = \varnothing$$

L'inéquation $x^2 \geqslant k$ est toujours vraie :

$$S = \mathbb{R}$$



L'inéquation $x^2 \leqslant k$ a pour ensemble solution :

$$S = \left[-\sqrt{k}; \sqrt{k}\right]$$

L'inéquation $x^2 \geqslant k$ a pour ensemble solution :

$$S = \left]-\infty; -\sqrt{k}\right] \cup \left[\sqrt{k}; +\infty\right[$$

EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 > 9$.

Pour tout réel x,

$$x^2 > 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3) > 0$$

Étudions le signe du produit $(x+3)(x-3)$ à l'aide d'un tableau de signe.

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-3$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x+3)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 > 9$ est $S =]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$.
Autre méthode : graphique

5 polynômes du second degré

Définition

Une fonction polynôme de degré 2 est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont des réels et $a \neq 0$.

EXEMPLES

— La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ est une fonction polynôme du second degré avec $a = -1$, $b = 4$ et $c = 5$.

— La fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = -\dfrac{x^2}{3} + \sqrt{2}$ est une fonction polynôme du second degré avec $a = -\dfrac{1}{3}$, $b = 0$ et $c = \sqrt{2}$.

— La fonction h définie pour tout réel x par $h(x) = (2x+1)^2 - 3x$ est une fonction polynôme du second degré car, pour tout réel x, $h(x) = 4x^2 + x + 1$ ($a = 4$, $b = 1$ et $c = 1$)

— La fonction k définie pour tout réel x par $k(x) = \dfrac{3}{x^2+1}$ n'est pas une fonction polynôme.

forme canonique

Toute fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta \qquad \text{avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha).$$

<u>Preuve :</u>

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Comme $a \neq 0$, pour tout réel x, $f(x) = a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}\right)$
Or $x^2 + \dfrac{b}{a}x$ est le début du développement de $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$. En effet, $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \dfrac{b}{a}x + \left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$.
On en déduit que pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
f(x) &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}
\end{aligned}$$

Soit en posant $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$, on obtient pour tout réel x, $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

EXEMPLE

Cherchons la forme canonique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2x^2-3x+2$.
Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
f(x) &= -2\times\left[x^2+\frac{3}{2}x-1\right]\\
&= -2\times\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}-1\right]\\
&= -2\times\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right]
\end{aligned}$$

Soit pour tout réel x, $f(x)=-2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{25}{8}$

variations

Quand on connaît la forme canonique d'une fonction polynôme du second degré, on peut en déduire son maximum ou son minimum.

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$.
Les variations de f sont données par les tableaux suivants :

$\boxed{a<0}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	$\searrow$	

$\boxed{a>0}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$	

<u>Preuve :</u>

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$, alors pour tout réel x, $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$.

Soient x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1-x_2<0$, étudions le signe de $f(x_1)-f(x_2)$:

$$\begin{aligned}
f(x_1)-f(x_2) &= a(x_1-\alpha)^2-a(x_2-\alpha)^2\\
&= a\left[(x_1-\alpha)^2-(x_2-\alpha)^2\right]\\
&= a\,(x_1-x_2)\,(x_1+x_2-2\alpha)
\end{aligned}$$

Ainsi, le signe de $f(x_1)-f(x_2)$ dépend également du signe de a et du signe de $(x_1+x_2-2\alpha)$

Considérons les deux intervalles $]-\infty;\alpha]$ et $[\alpha;+\infty[$ c'est à dire les intervalles $\left]-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right]$ et $\left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right[$:

Si $x_1<x_2\leqslant-\dfrac{b}{2a}$ alors $x_1+x_2<-2\times\dfrac{b}{2a}$ soit $x_1+x_2-2\alpha<0$.

Si $-\dfrac{b}{2a}\leqslant x_1<x_2$ alors $x_1+x_2>-2\times\dfrac{b}{2a}$ soit $x_1+x_2-2\alpha>0$.

Étudions le signe $f(x_1) - f(x_2)$ selon le signe de a :

— Cas où $a < 0$

Si $x_1 < x_2 \leqslant -\dfrac{b}{2a}$ alors $a(x_1 - x_2) > 0$ et $x_1 + x_2 - 2\alpha < 0$ d'où $f(x_1) - f(x_2) < 0$.

f est croissante sur l'intervalle $\left]-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right]$

Si $-\dfrac{b}{2a} \leqslant x_1 < x_2$ alors $a(x_1 - x_2) > 0$ et $x_1 + x_2 - 2\alpha > 0$ d'où $f(x_1) - f(x_2) > 0$.

f est décroissante sur l'intervalle $\left[-\dfrac{b}{2a}; +\infty;\right[$.

— Cas où $a > 0$

Si $x_1 < x_2 \leqslant -\dfrac{b}{2a}$ alors $a(x_1 - x_2) < 0$ et $x_1 + x_2 - 2\alpha < 0$ d'où $f(x_1) - f(x_2) > 0$.

f est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right]$

Si $-\dfrac{b}{2a} \leqslant x_1 < x_2$ alors $a(x_1 - x_2) < 0$ et $x_1 + x_2 - 2\alpha > 0$ d'où $f(x_1) - f(x_2) < 0$.

f est croissante sur l'intervalle $\left[-\dfrac{b}{2a}; +\infty;\right[$.

Conclusion :

— Si $a < 0$ alors la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right]$ et décroissante sur l'intervalle $\left[-\dfrac{b}{2a}; +\infty;\right[$.

— Si $a > 0$ alors la fonction f est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right]$ et croissante sur l'intervalle $\left[-\dfrac{b}{2a}; +\infty;\right[$.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par par $f(x) = -3x^2 - 2x + 1$. Ici $a = -3$, $b = -2$ et $c = 1$. Ainsi, $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1}{3}$ et $f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$. Comme $a < 0$, on en déduit le tableau des variations de f :

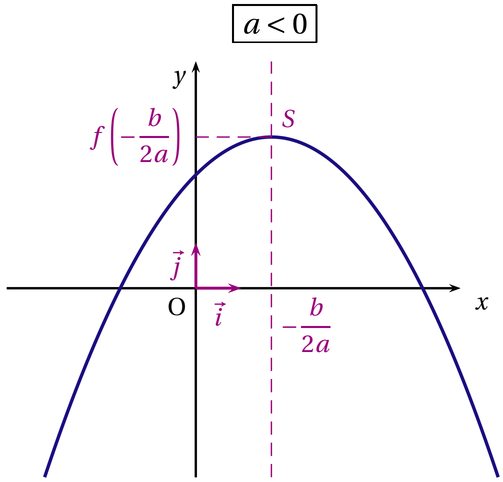
x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{4}{3}$	$\searrow$	

courbe représentative

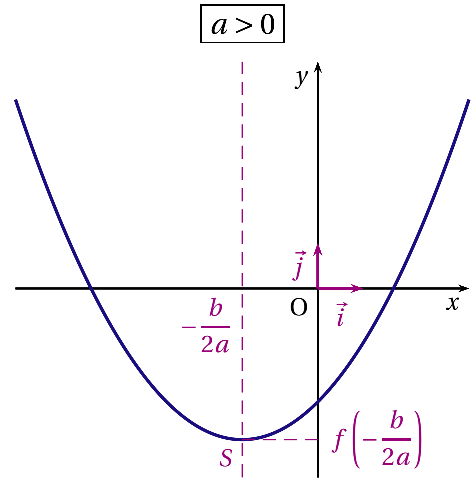
Dans un repère orthogonal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan, la courbe représentative d'une fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ est une parabole.
On dit que la parabole a pour équation $y = ax^2 + bx + c$

Le sommet S de la parabole a pour abscisse $-\dfrac{b}{2a}$. Il correspond au maximum ou au minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

La parabole a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$



La parabole est tournée vers le bas



La parabole est tournée vers le haut

6 équations, inéquations

I résoudre une équation du second degré

Résoudre les équations suivantes :

1. $3x^2 - x - 2 = 0$.
   Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} 3x^2 - x - 2 = 0 &\Leftrightarrow 3 \times \left[x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow 3\left[\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36} - \frac{2}{3}\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow 3\left[\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{25}{36}\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow 3\left[\left(x - \frac{1}{6} + \frac{5}{6}\right)\left(x - \frac{1}{6} - \frac{5}{6}\right)\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow 3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x-1) = 0 \end{aligned}$$

   L'équation admet deux solutions $x_1 = -\frac{2}{3}$ ou $x_2 = 1$

2. $-2x^2 + 3x - 2 = 0$.
   Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} -2x^2 + 3x - 4 = 0 &\Leftrightarrow -2 \times \left[x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow -2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + 1\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow -2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{36}\right] = 0 \end{aligned}$$

   Or pour tout réel x, $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{36} \geqslant \frac{7}{36}$ donc l'équation n'a pas de solutions. $S = \varnothing$

I.1 résoudre une inéquation du second degré

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $-\dfrac{x^2}{4}-x+3\leqslant 0$.
   Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}-\frac{x^2}{4}-x+3&=-\frac{1}{4}\times\left[x^2+4x-12\right]\\&=-\frac{1}{4}\left[(x+2)^2-4-12\right]\\&=-\frac{1}{4}\left[(x+2)^2-16\right]\\&=-\frac{1}{4}\left[(x+2+4)(x+2-4)\right]\\&=-\frac{1}{4}(x+6)(x-2)\end{aligned}$$

   Étudions le signe du produit $-\dfrac{1}{4}(x+6)(x-2)$ à l'aide d'un tableau de signe.

x	$-\infty$		-6		2		$+\infty$
$-\dfrac{1}{4}$		$-$	|	$-$	|	$-$	
$x+6$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$-\dfrac{1}{4}(x+6)(x-2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

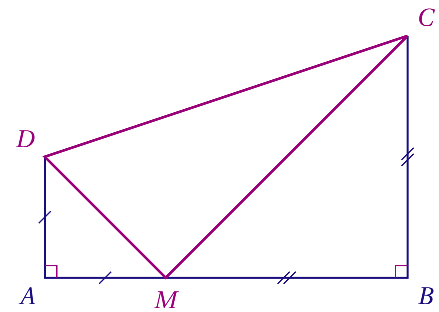
   L'ensemble des solutions de l'inéquation $-\dfrac{x^2}{4}-x+3\leqslant 0$ est $S=\left]-\infty;-6\right]\cup\left[2;+\infty\right[$.

2. $\dfrac{x^2}{2}-x+1\geqslant 0$
   Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{2}-x+1&=\frac{1}{2}\times\left[x^2-2x+2\right]\\&=\frac{1}{2}\left[(x-1)^2-1+2\right]\\&=\frac{1}{2}\left[(x-1)^2+1\right]\end{aligned}$$

   Or pour tout réel x, $(x-1)^2+1\geqslant 1$ d'où $\dfrac{1}{2}\left[(x-1)^2+1\right]\geqslant\dfrac{1}{2}$ donc l'ensemble solution de l'inéquation $\dfrac{x^2}{2}-x+1\geqslant 0$ est $S=\mathbb{R}$

Exercice 1 :



Sur la figure ci-contre, $AB = 6$, M est un point du segment $[AB]$ différent de A et B et les triangles AMD et MBC sont rectangles isocèles.
On cherche à déterminer la distance AM telle que l'aire du triangle MCD soit maximale.
On pose $AM = x$ et on note $g(x)$ l'aire du trapèze $ABCD$ et $f(x)$ l'aire du triangle MCD

1. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0;6[$, $g(x) = 18$.
2. Exprimer en fonction de x les aires des triangles AMD et MBC. En déduire que $f(x) = -x^2 + 6x$
3. Donner le tableau des variations de la fonction f.
4. En déduire la valeur de x telle que l'aire du triangle MCD soit maximale. Quel est alors l'aire maximale du du triangle MCD ?

Exercice 2 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   (a) $x^2 = x + 1$.
   (b) $x^2 - \frac{x}{4} - \frac{3}{4} = 0$
   (c) $-2x^2 - 5x + 3 = 0$
   (d) $\frac{x^2}{3} + \frac{x}{2} + \frac{1}{6} = 0$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
   (a) $x^2 - 5x + 6 \leqslant 0$.
   (b) $-2x^2 + 3x \leqslant 5$
   (c) $3x^2 + 3x \geqslant \frac{9}{4}$
   (d) $x - 1 \geqslant \frac{x^2}{3}$

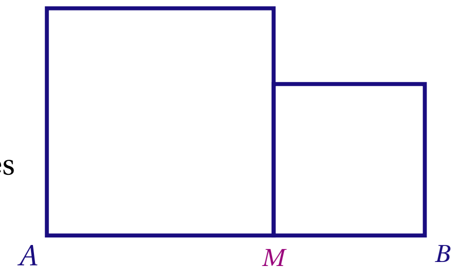
Exercice 3 :

f est une fonction polynôme du second degré telle que sa courbe représentative est une parabole de sommet $S\left(\frac{3}{2}; -\frac{25}{4}\right)$ passant par le point $A(1;-6)$.

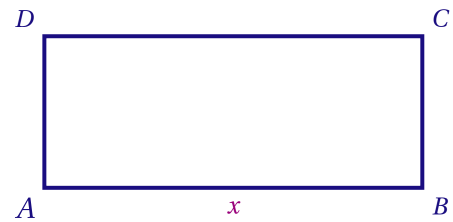
1. Donner le tableau des variations de f.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.

Exercice 4 :

M est un point du segment $[AB]$ de longueur 12.
À quelle distance du point A faut-il placer le point M pour que la somme des aires des carrés de côtés respectifs $[AM]$ et $[MB]$ soit minimale ?



Exercice 5 :

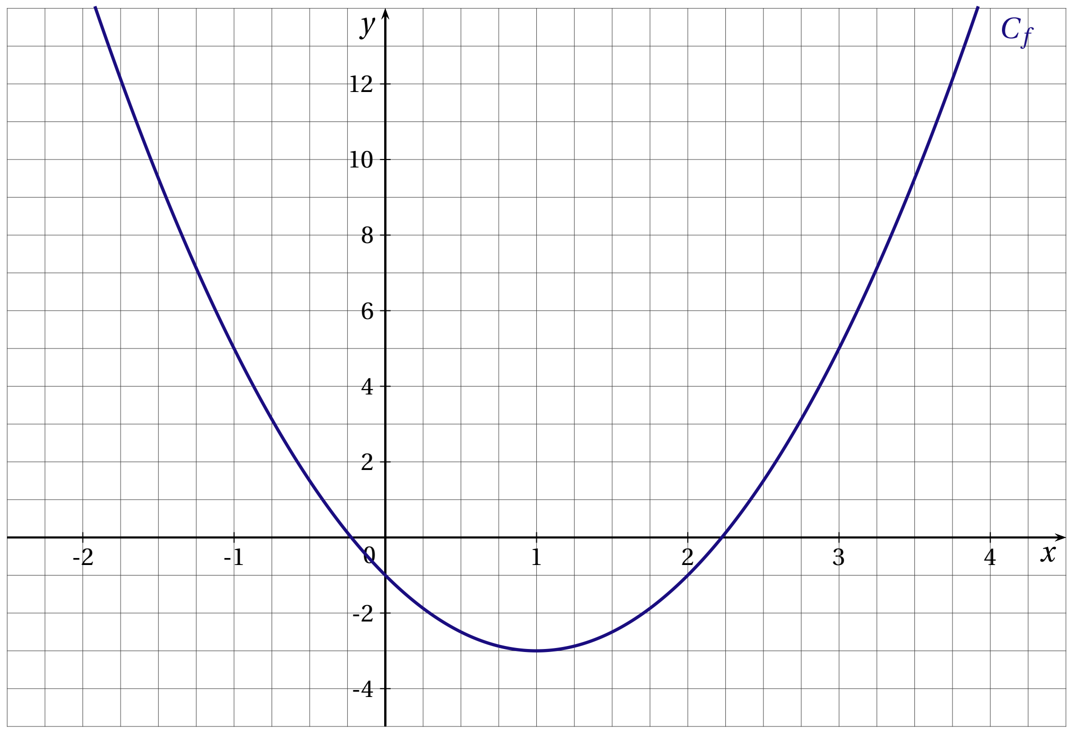


$ABCD$ est un rectangle de périmètre 32.
Quelle est l'aire maximale du rectangle $ABCD$?

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur pour tout réel x par $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$. La courbe représentative de la fonction f, notée C_f, est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. (a) Le point $A(-1;5)$ appartient-il à la courbe C_f ?
   (b) Donner le tableau des variations de la fonction f.
   (c) La proposition « Si $0 \leqslant x \leqslant 3$ alors $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(3)$ » est-elle vraie ou fausse ?
2. Soit g la fonction affine telle que $g(-1) = 8$ et $g(3) = -4$.
   (a) Déterminer l'expression de g en fonction de x.
   (b) Tracer la courbe D représentative de la fonction g dans le repère orthogonal donné ci-dessous.
3. (a) Montrer que pour tout réel x, $f(x) - g(x) = 2 \times \left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right]$.
   (b) Étudier le signe de $f(x) - g(x)$.
   (c) En déduire les positions relatives de la parabole C_f et de la droite D.



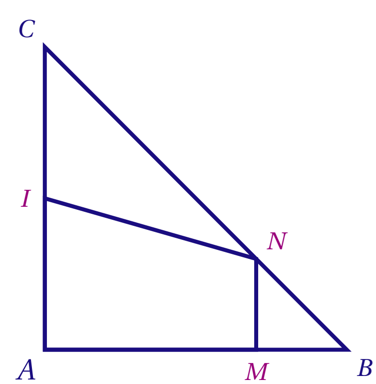
Exercice 7 :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		↘	-2	↗	

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g(x)$		↗	1	↘	

1. Parmi les fonctions polynômes du second degré ci-dessous, quelles sont celles qui ont le même tableau de variation que la fonction f ? le même tableau de variation que la fonction g ?
   $A(x) = x^2 + 3x - 2$; $B(x) = -x^2 + 6x - 11$; $C(x) = x^2 - 6x + 7$; $D(x) = -x^2 - 4x + 13$;
   $E(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x$; $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$; $G(x) = x^2 - 4x + 2$; $H(x) = -3x^2 + 12x - 11$.
2. Déterminer deux fonctions polynômes du second degré ayant respectivement le même tableau de variation que les fonctions f et g.

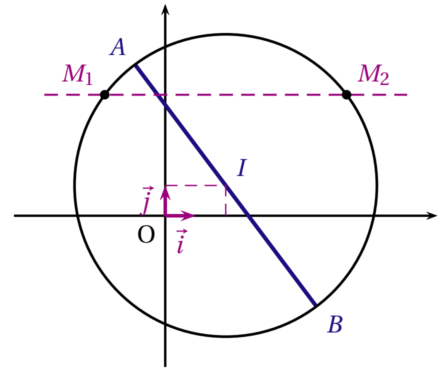
Exercice 8 :



ABC est un triangle rectangle isocèle tel que $AB = 10$. I est le milieu du segment $[AC]$.

Où faut-il placer le point M sur le segment $[AB]$ pour que l'aire du trapèze $AMNI$ soit maximale ?

Exercice 9 :



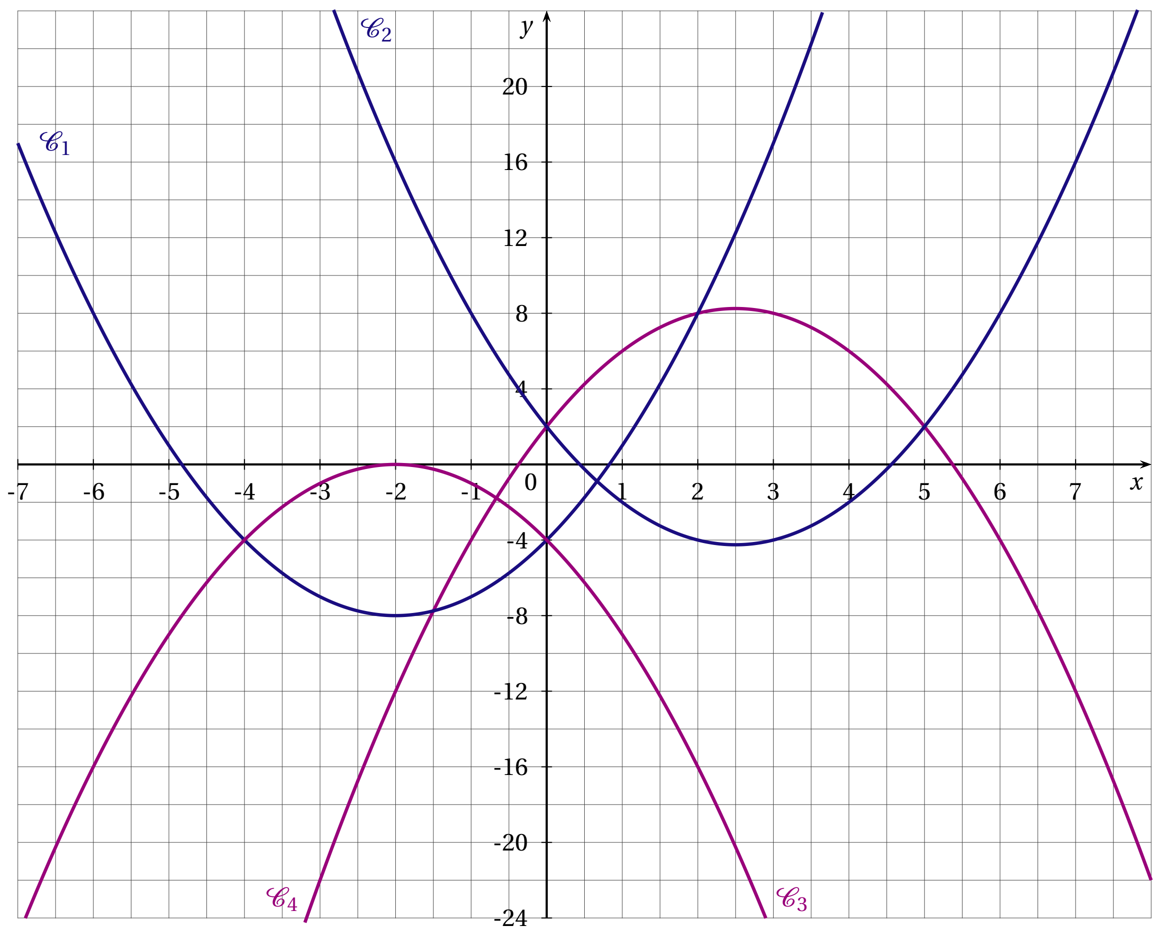
Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On considère les points $A(-1;5)$, $B(5;-3)$ et $M(x;4)$ un point du cercle de diamètre AB.

Calculer l'abscisse du point M.

Exercice 10 :

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x - 4$ et $g(x) = -x^2 + 5x + 2$.

1. Parmi les courbes tracées ci-dessous, déterminer celle qui représente la fonction f et celle qui représente la fonction g. (*Justifier*)



2. Calculer les coordonnées des points d'intersection des courbes représentatives des fonctions f et g.